Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС
«ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ЦЕНТР»

МИР
математики

А.С. Шалимов

Случайные процессы

Учебное пособие
2-е исправленное издание

ТЕХНОСФЕРА
Москва
2025

УДК 519.216
ББК 32.811
Ш18

Рецензенты:
доктор технических наук, начальник лаборатории отдела проектирования систем на кристалле АО НПЦ «Элвис» Беляев А.А.

кандидат физико-математических наук, проректор по научной работе, заведующий кафедрой «Проектирование и технология электронных средств» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (УлГТУ) Климовский А.Б.

Ш18 Шалимов А.С.
Случайные процессы
2-е исправленное издание
Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2025. – 142 с. ISBN 978-5-94836-711-8

Учебное пособие посвящено изучению теоретических и практических вопросов в области теории случайных процессов. Рассмотрены теоретические аспекты законов распределения и моментных функций, преобразования Фурье, корреляционных функций и спектральной плотности случайных процессов, а также линейных и нелинейных преобразований случайных величин. Каждая глава сопровождается примерами решения типовых задач, большая часть которых сосредоточена в последней главе – «Линейные и нелинейные преобразования случайных величин».

Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» и 11.03.01 «Радиотехника», а также для аспирантов и инженеров, занимающихся исследованиями в области разработки цифровых фильтров.

УДК 519.216
ББК 32.811

ISBN 978-5-94836-711-8

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 4

ГЛАВА 1.
Законы распределения и моментные функции 9

Задачи к главе 1 21

ГЛАВА 2.
Преобразование Фурье 36

Задачи к главе 2 56

ГЛАВА 3
Корреляционные функции и спектральные
плотности (энергетические спектры)
случайных процессов 61

Задачи к главе 3 72

ГЛАВА 4
Линейные и нелинейные преобразования
случайных величин 77

Задачи к главе 4 93

Список литературы 140

ПРЕДИСЛОВИЕ

Однажды, будучи студентом, я получил предложение работать схемотехником на соседнем предприятии. Честно говоря, не раз замечал, как, случайно наткнувшись на более-менее сложную схемку из транзисторов, ощущал чуть ли не благоговейный трепет и жуткий интерес в ней разобраться (хотя при этом абсолютно не понимал, что вообще передо мной нарисовано). А незадолго до этого, перед сдачей экзамена, случайно увидел в кабинете одного преподавателя потертый внушительных размеров том «Основы теории транзисторов и транзисторных схем» И.П.Степаненко. И после этого меня спрашивают, хочу ли я работать схемотехником:

– А ты знаешь схемотехнику хоть как-нибудь? Может, опыт какой есть?
– Нет.

Оставалось только подписать направление у начальника. В кабинет меня привели со словами:

– Вот перспективный студент, средний балл равен 4.5, он хотел бы проходить практику на нашем выпускающем предприятии схемотехником.
– Давайте попробуем, но я не могу ни гарантировать, что вас возьмут, ни тем более звонить туда и содействовать этому.

Пришел на собеседование. Длилось оно недолго, его суть можно было свести лишь к одной фразе: «Ничего не умею, но хочу». Поставленная задача звучала коротко и просто: «Есть у нас изделие, в котором уже давно стоит генератор шума. Он работает, но никто толком не знает, как. Вот заодно и тема для бакалаврской будет. Вперед».

Как я «разбирался» с этой задачей – отдельная история. Но следующее задание было ещё веселее: «Есть генератор случайных чисел на шумовом диоде, который мы как-то заставили работать, но поставщик теперь предлагает другие диоды, и ты должен разобраться, подойдут ли они, и если да, то что нужно нам скорректировать в устройстве».

В общем, пошел туда, куда меня послали. В библиотеку. Четырехтомник «Случайные процессы. Примеры и задачи» В.И. Тихонова (и др.) я взял не раздумывая. Так же как и двухтомник Б.И. Шахтарина «Случайные процессы в радиотехнике». И ещё много других замечательных книг.

Каждый рабочий день последующих трёх месяцев проходил одинаково: вспоминал теорию функции комплексной переменной, вспоминал, как брать производные и всевозможные интегралы, вспоминал теорию вероятности. Решал всем знакомые задачки про подбрасывание монетки и разноцветные шары в урне. Постепенно подобрался к критерию Пирсона, используя который, другие сотрудники кое-как настроили работу схемы. И понял, что решение здесь нельзя найти в принципе. Также я понял, что на работе о моем существовании попросту забыли...

В паспорте на диод было всего два параметра, которые влияли на параметр третий – параметр схемы. Их и нужно было правильно связать друг с другом. В «Случайных процессах» нашел упоминание первых двух, в этом не было ничего сложного, проблема в другом – как они связаны с третьим? Этот вопрос пока оставил в стороне, поскольку мне для понимания даже первых двух параметров нужно было потренироваться на типовых задачках. Решать задачи по случайным процессам было намного тяжелее, чем по теории вероятности, некоторые не поддавались в принципе, поэтому стал обращаться к репетиторам и не отставал от них до тех пор, пока выбранная мной задача не становилась понятна до конца. Ход решения при этом тщательно записывал.

С первыми двумя параметрами разобрался – а дальше что? Нигде не было прямого упоминания о том, как они связаны с третьим параметром. Бегло листая двухтомник «Случайные процессы», ближе к его концу наткнулся на раздел «Выбросы случайных процессов», в котором был приведен параметр, похожий на тот, который нужен мне. Но проблема в том, что даже в этом двухтомнике раздел про выбросы был написан настолько кратко, что ничего, кроме понимания правильного направления поиска, не появилось. По списку литературы нашел книгу В.И. Тихонова 1970-го года выпуска именно по этой теме. Поскольку в электронном виде найти её не смог, то заказал почтой на одном из букинистических сайтов, где частники размещают объявления.

Был июль 2007 года, мы с родителями уже собирались в отпуск на дачу. Зашел к начальнику по поводу отъезда и, думая, что заскочил на минутку, получил:

– Надо подать тезисы на конференцию. Прямо сейчас.

– Единственное, что у меня сейчас есть, – это незаконченный расчёт генератора случайных чисел. Который мало того что недоделан, так я ещё и не уверен, прав ли я вообще.

– Именно для этого и организуются конференции. Просто пишешь и докладываешь свои идеи как есть, правильные или нет, – коллеги поправят. До самого выступления ещё больше месяца, а в тезисах так и пиши: «Получен предварительный результат... требуется проверка... это не само решение, а подготовка к нему...»

Книга пришла незадолго до отъезда. Но сначала это не помогло. Да, я нашел в ней нужный раздел, но связать всё воедино не получалось. Шли дни, а я так и не знал, как найти решение. Беспокойство нарастало – что докладывать? Что я попытался чего-то там такое решить и не решил? Я бродил по дому, перебирая на память всё, в чем смог разобраться. Деревянные стены уныло смотрели на меня, а я упорно цеплялся взглядом за мелкие детали, как будто ответ был именно в них. Пасмурная погода приближающейся осени и загородная тишина давили на меня и подстегивали одновременно. Эту страницу я прочитал не раз. В какой-то момент провокационная мысль «что, если?...» пронзила, подбросив меня на месте. Огрызком карандаша в тетрадке, которая оставалась не до конца исписанной ещё со школы и которую я закинул в сумку перед отъездом по принципу «вроде есть на чем писать, сойдет и так», бросился делать расчёт уже с начала и до самого конца. Подставив в конечное выражение значения тех самых двух параметров, получил значение третьего параметра, который мне дали на работе в качестве отправной точки для самопроверки. Всё. До конца отпуска оставалось несколько дней...

Но я же не математик! И никогда им не был! Может, я придумал очередную чушь, за которую меня люди, хоть немного сведущие в случайных процессах, размажут на докладе?! Пошел на кафедру высшей математики, спросил, с кем можно проконсультироваться по случайным процессам, т.к. у меня есть решение одной задачи и я хотел бы, чтобы меня проверили. Нашел нужного преподавателя, отдал ему расчёт, спросил, когда можно подойти за результатом. Через неделю пришел и получил:

– Ну, вот здесь, в начале, есть несколько сомнительных моментов, это опустим, а вот здесь, – и при этом показывает на отправное выражение для связки трех параметров, – вы хотите сказать, что вероятность появления случайной величины будет равняться 100%?

– Так ведь это классическое условие нормировки.

– Вы хотите сказать, что случайная величина в указанном диапазоне появится с вероятностью 100%? Это же случайная величина! Такое вообще возможно?!

С этими словами он сунул мне изрядно помятые листы с расчётами, и в довольно резкой форме мы попрощались.

Ладно, думаю, на конференции мне хоть что-нибудь да скажут.

Пока я докладывал, один из членов комиссии задумчиво смотрел на график в презентации, как будто пытался там что-то отыскать.

– Таким образом, можно утверждать, что в шумовом сигнале всегда присутствуют точки, статистически независимые друг от друга, следующие друг за другом с определённой частотой повторения. Если делать выборку именно с этой частотой, то полученные числа будут абсолютно случайными.

Когда я замолчал, то в помещении повисла длинная пауза: народу было мало, большую часть составляли такие же студенты, как и я, но один из них всё же робко спросил:

– То есть полученные числа будут абсолютно случайны?

– Да.

Председатель комиссии спросил:

– Вы патентовали это решение?

– Нет.

– Вам следует об этом подумать.

С тех пор прошло 15 лет. Интерес к небольшой задаче, которую автор тогда не смог решить правильно потому, что вовремя не перевернул страницу учебника, привел к решению новому, легшему в основу докторской диссертации, работа над которой продолжается уже 15 лет. Почему автор так долго переворачивает страницы? Да потому, что читать подобные учебники крайне тяжело. Приходится просто «вгрызаться» в каждый абзац и обращаться ко многим дополнительным источниками для того, чтобы шаг за шагом прорываться сквозь тьму жутких формул навстречу своей мечте. Ну а чтобы достигнутые успехи не забывались, все ходы были тщательно записаны. Так получилось настоящее учебное пособие.

Автор ни в коем случае не претендует на новизну тех положений теории случайных процессов и сформулированных задач, которые приведены в учебном пособии. Конечно же, всё это известно давно: ссылки на заимствованные источники приведены в конце книги. Дело в другом – в авторском видении подхода к порядку изложения материала и, что самое главное, в авторской манере решения стандартных задач.

Теоретические части преимущественно представляют собой цитирование источников в том объеме, который достаточен для понимания хода решения задач, – для этого они были снабжены комментариями. Но главной целью пособия является именно подробный разбор задач по случайным процессам. Настолько подробный, что – автор искренне надеется – читатель сможет освоить этот объем информации не за полгода неравной битвы с формулами (как было с автором), а за одну-две недели приятного, ненавязчивого чтения за чашечкой кофе. И сможет намного легче и быстрее получить новые и интересные решения в области теории случайных процессов.

ГЛАВА I

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Случайный процесс $\xi(t)$ [1, 2] считается определённым на интервале времени $(0,T)$, если при произвольном числе n и для любых моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ на этом интервале известна n-мерная плотность распределения вероятностей $W(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Требования к $W(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$:

- положительной определённости:

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \geq 0,$$

- нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} W\left(x_1, x_2, \ldots, x_{1n}; t_1, t_2, \ldots, t_n\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1,$$

- симметрии:
  функция $W(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ не должна изменяться при любой парной перестановке аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $t_1, t_2, \ldots, t_n$,
- согласованности:

$$W\left(x_1, x_2, \ldots, x_m; t_1, t_2, \ldots, t_m\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} W\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots x_n,; t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}, t_n\right) dx_{m+1} \ldots dx_n,$$

  для любых $m<n$.

Помимо функции плотности распределения вероятности используются т. н. моментные функции – более простые характеристики.

n-мерная начальная моментная функция, зависящая от n несовпадающих аргументов $t_1, t_2, \ldots, t_n$, порядка $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$:

$$m_{\nu_1+\nu_2\dots\nu_n}(t_1,t_2,\dots,t_n)=E\left\{\xi^{\nu_1}(t_1)\,\xi^{\nu_2}(t_2)\dots\xi^{\nu_n}(t_n)\right\}=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\dots x_n^{\nu_n}W(x_1,x_2,\dots,x_n;t_1,t_2,\dots,t_n)\,dx_1dx_2\dots dx_n.$$

Для порядка $\nu=\nu_1+\nu_2$ (например)

$$m_{\nu_1+\nu_2}(t_1,t_2)=E\left\{\xi^{\nu_1}(t_1)\,\xi^{\nu_2}(t_2)\right\}=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}W(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2=m_2(t_1,t_2).$$

Соответственно, имеют место несколько частных случаев:

- одномерная начальная моментная функция первого порядка:

  $$m_1(t)=E\left\{\xi^1(t)\right\}=E\left\{\xi(t)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}xW(x,t)\,dx=m_\xi(t),$$

  где $m_\xi(t)$ – математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)$;
- двумерная начальная моментная функция второго порядка:

  $$m_{\nu_1+\nu_2}(t_1,t_2)=E\left\{\xi^{\nu_1}(t_1)\xi^{\nu_2}(t_2)\right\}=\begin{vmatrix}\nu_1=1\\ \nu_2=1\end{vmatrix}=$$
  $$=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2W(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2=R_\xi(t_1,t_2)=m_2(t_1,t_2),$$

где $R_\xi(t_1, t_2)$ – корреляционная функция случайного процесса $\xi(t)$.

n-мерная центральная моментная функция, зависящая от n несовпадающих аргументов $t_1, t_2, \dots, t_n$, порядка $\nu=\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n$:

$$\mu_{\nu_1+\nu_2\dots\nu_n}(t_1,t_2,\dots,t_n)=$$
$$E\left\{\left(\xi(t_1)-m_\xi(t_1)\right)^{\nu_1}\left(\xi(t_2)-m_\xi(t_2)\right)^{\nu_2}\dots\left(\xi(t_n)-m_\xi(t_n)\right)^{\nu_n}\right\}=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\left(x_1-m_\xi(t_1)\right)^{\nu_1}\cdot\left(x_2-m_\xi(t_2)\right)^{\nu_2}\cdot\ldots\cdot\left(x_n-m_\xi(t_n)\right)^{\nu_n}\cdot$$
$$\cdot W(x_1,x_2,\dots,x_n;t_1,t_2,\dots,t_n)\,dx_1dx_2\dots dx_n.$$

Соответственно, имеют место несколько частных случаев:

- двумерная центральная моментная функция второго порядка:

$$\mu_{\nu_1+\nu_2}(t_1,t_2)=E\left\{\left(\xi(t_1)-m_\xi(t_1)\right)^{\nu_1}\left(\xi(t_2)-m_\xi(t_2)\right)^{\nu_2}\right\}=$$

$$=\begin{vmatrix}\nu_1=1\\ \nu_2=1\end{vmatrix}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x_1-m_\xi(t_1)\right)^{\nu_1}\left(x_2-m_\xi(t_2)\right)^{\nu_2}\cdot$$

$$\cdot W(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2=K_\xi(t_1,t_2),$$

где $K_\xi(t_1,t_2)$ – ковариационная функция случайного процесса $\xi(t)$.

В том случае, если $t_1=t_2=t_x$:

$$\mu_2(t,t)=\mu_2(t)=$$

$$=E\left\{\left(\xi(t)-m_\xi(t)\right)^2\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{x}-m_\xi(t)\right)^2W(x;t)dx.$$

Возвращаемся к выражению для корреляционной функции:

$$m_{\nu_1+\nu_2}(t_1,t_2)=E\left\{\xi^{\nu_1}(t_1)\,\xi^{\nu_2}(t_2)\right\}=\begin{vmatrix}\nu_1=\nu_2=1\\ t_1=t_2=t\end{vmatrix}=$$

$$=E\left\{\xi^2(t)\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2W(x,t)dt=R_\xi(t,t)=m_2(t,t).$$

Соответственно, выражение для $\mu_2(t_1, t_2)$ примет вид:

$$\mu_2(t_1,t_2)=R_\xi(t,t)-m_\xi^2(t).$$

Далее устанавливаем важную связь между $R_\xi(t)$ и $K_\xi(t)$:

$$R_\xi(t,t)-m_\xi^2(t)=K_\xi(t,t),\ \text{для случая}\ t_1=t_2=t$$

$$K_\xi(t,t)=D_\xi(t),$$

где $D_\xi(t)$ – дисперсия случайного процесса $\xi(t)$.

Соответственно, среднее квадратичное отклонение

$$\sigma_\xi(t)=\sqrt{D_\xi(t)}=\sqrt{E\left\{\left(\xi(t)-m_\xi(t)\right)^2\right\}}.$$

Наряду с понятием функции плотности распределения вероятности есть инструмент характеристических функций (и в некоторых случаях он более удобен).

Характеристическая функция случайной величины X:

$$\Theta_{\mathrm{X}}(ju) = E\left\{e^{ju\mathrm{X}}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ju\mathrm{X}} W(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) e^{jux_n},$$

где $p(n)$ – распределение вероятностей.

Производящая функция случайной величины X:

$$\varphi_{\mathrm{X}}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) s^n,$$

где s – оператор Лапласа.

Соответственно, $\Theta_{\mathrm{X}}(ju)$ используется для непрерывных случайных величин, а $\varphi_{\mathrm{X}}(s)$ – для дискретных случайных величин.

По известной $\Theta_{\mathrm{X}}(ju)$ с помощью прямого преобразования Фурье можно определить функцию плотности распределения вероятности:

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{\mathrm{X}}(ju_1, ju_2, \ldots, ju_n) e^{-ju_1x_1} e^{-ju_2x_2} \ldots e^{-ju_nx_n} du_1 du_2 \ldots du_n.$$

Также для случайной величины (а не случайного процесса!) может быть рассмотрена моментная функция:

$$\Phi_{\mathrm{X}}(s) = E\left\{e^{s\mathrm{X}}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s\mathrm{X}} W(x)\,dx,$$

в том числе

- вторая характеристическая функция:

$$\Psi_{\mathrm{X}}(ju) = \ln(\Theta_{\mathrm{X}}(ju)),$$

- вторая моментная функция:

$$\Psi_{\mathrm{X}}(ju) = \ln(\Phi_{\mathrm{X}}(s)).$$

Соответственно, n-я производная от моментной функции

$$\Phi_{\mathrm{X}}^{(n)}(s) = E\{\mathrm{X}^n e^{s\mathrm{X}}\},$$

$\Phi_{\mathrm{X}}^{(n)}(0) = E\{\mathrm{X}^n\} = m_n$ – начальный момент n-го порядка.

Частные случаи:

$$\Phi'_X(0) = m_1,$$
$$\Phi''_X(0) = m_2 = m_1^2 + \sigma^2.$$

Разложение моментной функции в ряд Маклорена:

$$\Phi_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} s^n.$$

Если вернуться к вопросу о функции плотности распределения вероятности, связь с характеристической функцией (для многомерного случайного процесса) имеет вид

$$\Theta_\xi(ju_1, ju_2, \ldots, ju_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = E\left\{\prod_{i=1}^{n} e^{ju_i\xi(t_i)}\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{(ju_1x_1 + ju_2x_2 + \ldots + ju_nx_n)} \cdot W(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

при том что
$$\begin{aligned} \xi(t_1) &= x_1, \\ \xi(t_2) &= x_2, \\ &\vdots \\ \xi(t_n) &= x_n. \end{aligned}$$

Соответственно, можно установить связь между характеристической функцией и n-мерной начальной функцией:

$$m_{\nu_1+\nu_2\ldots\nu_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) =$$
$$= j^{-(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n)} \left(\frac{d^{(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n)} \cdot \Theta_\xi(ju_1, ju_2, \ldots, ju_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)}{du_1^{\nu_1} du_2^{\nu_2} \ldots du_n^{\nu_n}} \right).$$

Кроме того, есть связь между K_ξ и R_ξ через начальные моментные функции:

$$K_\xi(t_1, t_2) = E\{(\xi(t_1) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2) - m_\xi(t_2))\} =$$
$$= R_\xi(t_1, t_2) - m_1(t_1)m_1(t_2),$$

где $m_\xi(t_1)$ – математическое ожидание случайной величины $\xi(t_1)$,

$$K_\xi(t_1, t_2, t_3) = \mu_3(t_1, t_2, t_3) - m_1(t_1)K_\xi(t_2, t_3) - m_1(t_2)K_\xi(t_1, t_3) -$$
$$- m_1(t_3)K_\xi(t_1, t_2) + 3m_1(t_1)m_1(t_2)m_1(t_3).$$

Связь характеристической и моментной функции:

$$\Theta_\xi\left(ju_1, ju_2, \ldots, ju_n; t_1, t_2, \ldots, t_n\right) =$$
$$= 1 + j\sum_{k=1}^{n} m_1\left(t_k\right)u_k + \frac{1}{2!}j^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m_{1,1}\left(t_k, t_l\right)u_k u_l +$$
$$+ \frac{1}{3!}j^3\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} m_{1,1,1}\left(t_k, t_l, t_m\right)u_k u_l u_m + \ldots$$

Связь характеристической и корреляционной функции:

$$\Theta_\xi\left(ju_1, ju_2, \ldots, ju_n; t_1, t_2, \ldots, t_n\right) =$$
$$= e^{\left(j\sum_{k=1}^{n} R_\xi\left(t_k\right)u_k + \frac{1}{2!}j^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} R_\xi\left(t_k, t_l\right)u_k u_l + \frac{1}{3!}j^3\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} R_\xi\left(t_k, t_l, t_m\right)u_k u_l u_m + \ldots\right)}.$$

Для гауссова случайного процесса

$$W\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^n \Delta}} e^{-\frac{1}{2\Delta}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\Delta_{kl}\left(x_k - m_\xi\left(t_k\right)\right)\left(x_l - m_\xi\left(t_l\right)\right)},$$

где

$m_\xi(t_k)$, $m_\xi(t_l)$ – математическое ожидание случайной величины $\xi(t_k)$ и $\xi(t_l)$,

$\Delta = |K_\xi|$ – определитель n-ого порядка, составленный из значений $K_\xi(t_k, t_l)$,

Δ_{kl} – алгебраическое дополнение элемента $K_\xi(t_k, t_l)$ определителя Δ.

Случайный процесс $\xi(t)$ является стационарным в узком смысле, если все его $W(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ произвольного порядка n не меняются при одновременном сдвиге всех точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$ вдоль оси времени на любое τ.

Случайный процесс $\xi(t)$ является стационарным в широком смысле, если $E\{\xi(t)\}$ (математическое ожидание) не зависит от времени, а корреляционная функция $R_\xi(t_1, t_2)$ зависит лишь от разности $\tau = |t_1 - t_2|$. Для определения $m_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n}$ и $\mu_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n}$ нужно иметь все реализации, но это не всегда возможно. Поэтому было введено понятие «эргодического» случайного процесса – такой случайный процесс, статистические характеристики которого могут быть определены всего лишь по одной реализации.